مسئله مکان‌یابی p ـ هاب با ظرفیت نامتناهی*در حضور صف M/G/۱

معصومه رضازاده، دانشجوی کارشناسی ارشد، masoome.rezazade@yahoo.com
مهدی زعفرانیه ، عضو هیئت علمی دانشگاه حکیم سبزواری ، mehdi.zaferanieh@gmail.com
محمود امین‌طوسی، عضو هیئت علمی دانشگاه حکیم سبزواری، m.amintoosi@hsu.ac.ir

چکیده: مسئله مکان‌یابی هاب (HLP) [۱] یک تعمیم نسبتاً جدید از مسائل مکان‌یابی است. این مسائل با پیدا کردن مکان‌های هاب و تخصیص نقاط تقاضا به این مکان‌ها سرو کار دارد.ما هاب‌ها را که بخش‌های پر ازدحام شبکه هستند، همانند یک صف M/G/۱ مدل‌بندی می‌کنیم. در این مقاله ابتدا یک برنامه‌ریزی غیر خطی با محدودیت‌های خطی برای مسئله نمایش می‌دهیم که زمان کلی حمل و نقل بین گره‌های شبکه را مینیمم می‌کند، سپس این مسئله را با استفاده از الگوریتم ژنتیک حل می‌کنیم و با الگوریتم جستجوی ممنوعه مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی:مسئله مکان‌یابی هاب، نظریه صف‌بندی، متوسط زمان تأخیر در صف

مقدمه

مسئله شبکه هاب و پره [۲] به صورت زیر توصیف می‌شود: یک شبکه از گره‌هایی که هر جفت داری یک جریان هستند، تعیین مجموعه‌ای ازهاب‌ها از میان گره‌های شبکه که هر واحد جریان در ابتدا از میان یک یا دو هاب قبل از رسیدن به گره مقصد عبور می‌کند که هاب‌ها به طور کامل به هم متصل هستند و گره‌های غیر هاب فقط به یک هاب تخصیص می‌یابند، گره‌های غیر هاب یا نقاط تقاضا، **پره** نامیده می‌شوند. این مسائل مفید بودن حرکت روی یال‌های بین هاب‌ها را از نظر معیارهای اقتصادی تفسیر می‌کند. مسئله مکان‌یابی هاب ابتدا توسط اوکیلی [۳][۱] فرمول‌بندی شد.

صف مکانی است که متقاضیان برای اخذ سرویس مراجعه می‌کنند و با سیستم‌هایی در ارتباط است که در آن‌ها ورود مشتریان و هم‌چنین سرویس دهی به آن‌ها حالت تصادفی دارد. به هنگام ورود مشتری به سیستم، ارائه خدمت به مشتری جدید در صورت بیکار بودن حداقل یکی از سرویس‌دهندگان آغاز می‌شود

* Uncapacitated allocation p-hub location problem
[۱] hub location problem
[۲] spoke
[۳] O'kelly

و در صورت مشغول بودن تمام سرویس‌دهندگان، مشتری جدید بایستی در صف منتظر بماند. از جمله کاربردهای نظریه صف‌بندی و مسائل هاب می‌توان به حرکت مسافران هواپیما و ارسال پیام در شبکه‌های ارتباطات از راه دور اشاره کرد. یکی از سیستم‌های صف، صف M/G/۱ است که در آن M نشان‌دهنده توزیع نمایی متغیر تصادفی زمان بین دو ورود متوالی و G توزیع دلخواه متغیر تصادفی مدت زمان سرویس‌دهی است. این سیستم دارای یک سرویس‌دهنده با ظرفیت صف نامتناهی است که براساس نظم اول ورود_اول سرویس‌دهی [۴] عمل می‌کند.

مارینو [۵] و سرا [۶][۴] در سال ۲۰۰۳ مسئله مکان‌یابی هاب در شبکه‌های خطوط هواپیمایی را در حضور صف M/D/c در مکان هر هاب مدل‌بندی کردند. محمدی [۷] و جولایی [۸][۵] در سال ۲۰۱۱ به مدل‌بندی و حل مسئله مکان‌یابی پوششی هاب در حضور صف M/M/c در مکان هر هاب پرداختند. در بخش ۱، یک مدل برنامه‌ریزی غیر خطی برای مسئله معرفی می‌کنیم. بخش ۲، شامل توضیح مختصری از الگوریتم ژنتیک است. مثال‌های عددی در بخش ۳ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

بخش یک

یک گراف $G = (N, E)$ با مجموعه گره N داده شده که هر گره متناظر با مکان‌های مبدأ،مقصد و هاب‌های مکان‌یابی شده است و مجموعه E یال‌های بین گره‌های شبکه داده شده است. فرض کنید h_{ij} کسری از جمعیت مشتری‌هایی است که قصد دارند از گره i به گره j منتقل شوند که $\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} h_{ij} = 1$. همچنین t_{ij} مدت زمان لازم برای انتقال هر واحد جریان از گره i به j است. مسیر از گره مبدأ i به گره مقصد j شامل سه قسمت است: ۱) جمع‌آوری از گره مبدأ i به هاب k ۲) انتقال بین هاب k و هاب m و ۳) توزیع از هاب m به گره مقصد j . مدت زمان حرکت برای هر واحد جریان در مسیر $(i \to k \to m \to j)$ به صورت $xt_{ik} + \alpha t_{km} + \delta t_{mj}$ نوشته می‌شود که x و α و δ به ترتیب هزینه‌های جمع‌آوری، انتقال و توزیع هستند. $\alpha < 1$ به عنوان یک ضریب کاهشی برای مدت زمان حرکت روی یال‌های بین هاب‌ها در نظر گرفته می‌شود و $x = \delta = 1$ فرض می‌شود.

علاوه بر آن فرض می‌کنیم مشتریان واقع در گره‌های مبدأ برای دریافت سرویس و رسیدن به گره مقصد به طور تصادفی برحسب یک فرایند پواسن زمان_همگن با نرخ ورود $\lambda_i = \lambda\sum_{j\in N} h_{ij} > 0 \quad \forall i \in N$ و متوسط آهنگ ورود $\lambda = \sum_{i\in N}\lambda_i$ به مکان هابی که به آن تخصیص داده شده اند وارد می‌شوند و در صورت مشغول بودن سرویس‌دهنده، تقاضای بی‌پاسخ وارد صفی می‌شوند که برحسب نظم اول ورود_اول سرویس‌دهی است که این صف از نوع M/G/۱ است. با این فرضیات کل زمان صرف شده در سیستم را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد:۱) مجموع مدت زمان حرکت روی یال‌های شبکه ۲)مجموع متوسط زمان تأخیر در تمام صف‌های [۹] M/G/۱ تشکیل شده در مکان هر هاب. مدت زمان تأخیر در صف همان مدت زمان انتظار در صف است. اما مدت زمان سرویس‌دهی به مشتریان گره مبدأ i برای انتقال از هاب k به هاب m به صورت زیر است:

$$S_{i,k,m} = \alpha t_{km} + w_i + \alpha t_{mk} \quad \forall i, k, m$$

[۴] First come first service
[۵] Marinov
[۶] Serra
[۷] Mohammadi
[۸] Jolai
[۹] expected queueing delay

که در آن t_{km} مدت زمان حرکت از هاب k به هاب m و w_i مدت زمان سرویس‌دهی در حالت سکون به مشتریان گره مبدأ i و t_{mk} مدت زمان حرکت برگشت سرویس‌دهنده مکان هاب k از مکان هاب m است، ما مدت زمان رفت و برگشت را برابر فرض می‌کنیم.
حال گشتاورهای اول $\overline{S}_k(X)$ و دوم $\overline{S^2}_k(X)$ زمان سرویس‌دهی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\overline{S}_k(X) = \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{m\in N} h_{ij}\overline{S}_{i,k,m}X_{ik}X_{jm} \quad \forall k\in N$$

$$\overline{S^2}_k(X) = \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}\sum_{m\in N} h_{ij}(\overline{S}_{i,k,m})^2 X_{ik}X_{jm} \; \forall k\in N$$

که در آن $\overline{S}_{i,k,m} = 2\alpha t_{km} + \overline{w_i}$ و با توجه به رابطه بدست آمده برای متوسط زمان تأخیر در صف [۲]می‌توان رابطه متوسط زمان تأخیر در محل هر هاب را که دارای یک صف M/G/۱ است به صورت زیر نوشت:

$$\overline{Q}_k(X) = \begin{cases} \frac{\lambda(\overline{S}_k(X))^2}{2(1-\lambda\overline{S}_k(X))} \quad \forall k\in N \\ \qquad\qquad 1-\lambda\overline{S}_k(X) > 0 \\ \infty \qquad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال مجموع متوسط زمان تأخیر در صف برای تمام مکان‌های هاب به صورت $\overline{Q}(X) = \sum_{k\in N}\overline{Q}_k(X)$ خواهد بود. متغیر تصمیم X_{ik}، ۱ است اگر گره i به هاب k متصل باشد و در غیر این صورت ۰ است، هر هاب به خودش تخصیص می‌یابد و اگر j یک هاب باشد آنگاه $X_{jj} = 1$. با این تعاریف مسئله (UApHLP) در حضور صف M/G/۱ به صورت زیر مدل‌بندی خواهد شد:

$$\begin{aligned} & min \sum_i\sum_j h_{ij}(\sum_k t_{ik}X_{ik} + \sum_m t_{jm}X_{jm} + \\ & \quad \alpha\sum_k\sum_m t_{km}X_{ik}X_{jm}) + \overline{Q}(X) && (1) \\ & \text{subject to} \\ & \sum_k X_{ik} = 1 \qquad \forall i\in N && (2) \\ & \sum_k X_{kk} = p && (3) \\ & X_{kk} - X_{ik} \geq 0 \qquad \forall i,k\in N && (4) \\ & X_{ik} \in \{0,1\} \qquad \forall i,k\in N && (5) \end{aligned}$$

تابع هدف در معادله (۱) مجموع زمان‌های حمل و نقل روی یال‌های شبکه و مجموع متوسط زمان انتظار در صف‌های تشکیل شده در مکان هر هاب را مینیم می‌کند. معادله (۲) یعنی هر پره بایستی فقط به یک هاب متصل باشد.معادله (۳) یعنی باید p هاب مکان‌یابی شود. معادله (۴) یعنی پره i به k متصل است اگر k یک هاب باشد. معادله(۵) به این معنی است که متغیرهای مسئله به صورت صفر و یک هستند.

بخش دو

الگوریتم ژنتیک یک الگوریتم جستجو برای یافتن جواب‌های نزدیک به بهینه در اندازه‌های بزرگ است که اولین بار توسط هلند [۱۰] در سال ۱۹۷۵ ابداع و توسط گلدبرگ[۱۱] توسعه داده شد. این روش با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از جواب‌های مسأله به عنوان جمعیت اولیه، در هر تکرار به نحو مؤثری نواحی مختلف فضای جواب را جستجو می‌کند و با شکل کد شده جواب‌ها (کروموزوم) سر و کار دارد. در این مسأله جمعیت اولیه ۵۰ کروموزوم باینری می‌باشد. در هر تکرار از الگوریتم، مقدار تابع هدف برای هر کروموزوم از جمعیت محاسبه خواهد شد، سپس به هر

[10] Holland
[11] Goldberg

کروموزوم یک عدد برازندگی نسبت داده می‌شود. بر اساس مقدار برازندگی مجموعه‌ای از کروموزوم‌ها به عنوان والدین در نظر گرفته می‌شوند و با اعمال عمل ترکیب بر روی آن‌ها، چند جواب برای جمعیت جدید به‌دست می‌آید. در حین اجرای الگوریتم، جهش‌ها و مهاجرت‌هایی برای بهبود انجام می‌شود [۳] .

بخش سه

در این بخش ما یک شبکه با ۲۵ گره را در نظر گرفته و مسئله را با مقادیر مختلف λ و α و با استفاده از الگوریتم ژنتیک و جستجوی ممنوعه حل کرده و مقادیر تابع هدف و زمان محاسباتی هر دو الگوریتم را در جداول زیر که اولی به ازای p=۷ و دومی به ازای p=۸ قرار می‌دهیم و آن‌ها را تفسیر می‌کنیم.

ما در حل این مسئله $\overline{w}_i$ و $\overline{w^{۲}}_i$ را برای تمام گره‌ها ثابت و به ترتیب ۲۰ و ۲۵ تعریف می‌کنیم و مقدار جریان‌ها و مدت زمان حمل و نقل بین هر جفت گره به عنوان ورودی به مسئله اعمال شده‌اند.

(۶)

$\lambda-\alpha$	GA.f	Ta.f	GA.t	Ta.t
۰/۱−۰/۱	۱۴۰/۵۵	۶/۶	۱۴۰/۵۵	۹۰/۹۴
۰/۱−۰/۵	۲۶۶/۵۳	۵/۸۳	۲۶۶/۵۳	۹۷/۳۵
۰/۱−۰/۹	۳۶۴/۹۱	۶/۷	۳۶۴/۹۱	۹۰/۵۹
۰/۵−۰/۱	۳۶۴/۰۲	۶/۴۹	۳۶۴/۰۲	۹۰/۰۳
۰/۵−۰/۹	۱۶۷۱/۲	۶/۶	۱۶۷۱/۲	۱۰۱/۱
۰/۹−۰/۱	۵۹۹/۵۷	۶/۷۴	۵۹۹/۵۷	۱۰۱/۲۶

(۷)

$\lambda-\alpha$	GA.f	Ta.f	GA.t	Ta.t
۰/۱−۰/۱	۱۳۸/۵۶	۷/۴۹	۱۳۸/۵۶	۱۰۴/۴۵
۰/۱−۰/۵	۳۲۴/۳۶	۷/۸۱	۳۲۴/۳۶	۱۰۵/۶۴
۰/۱−۰/۹	۴۲۵/۸	۶/۹۹	۴۲۵/۸	۹۶/۷۶
۰/۵−۰/۱	۳۶۶/۹۱	۶/۶۱	۳۶۶/۹۱	۹۹/۱۳
۰/۵−۰/۹	۲۸۱۳/۶	۶/۰۲	۲۸۱۳/۶	۱۰۹/۴۵
۰/۹−۰/۱	۵۴۴/۸۴	۷/۴۵	۵۴۴/۸۴	۱۰۱/۱۱

نتایج

همانطور که مشاهده می‌کنیم، با افزایش نرخ ورود λ و ضریب کاهشی α مجموع مدت زمان حمل و نقل در کل شبکه افزایش می‌یابد. همچنین زمان محاسباتی الگوریتم ژنتیک بسیار کمتر از جستجوی ممنوعه است.

مراجع

[1] M.O'kelly, A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities , European Journal of Operational Research 32(1987) 393-404.

[2] L.Kleinrock, Queueing system, volume II. New York: Wiley-Interscience, 1976.

[3] J.H.Jaramillo,J.Bhadury, R.Bata, On the solve location problems, Computers Operations Research 29(2002) 761-779.

[4] V.Marianov, D.Serra, Location models for airline hubs behaving as M/D/c queues, Computers Operations Research 30(2003) 983-1003

[5] M.Mohammadi, F.Jolai, H.Rostami, An M/M/c queue model for hub covering location problem, Mathematical and Compute Modelling 54(2011) 2623-2638. space