

استفاده از نرم بلوکی در بهینه‌سازی تُنگ با کاربرد فراتفکیک‌پذیری

راضیه حامدی، محمود امین طوسی، مهدی زعفرانیه

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

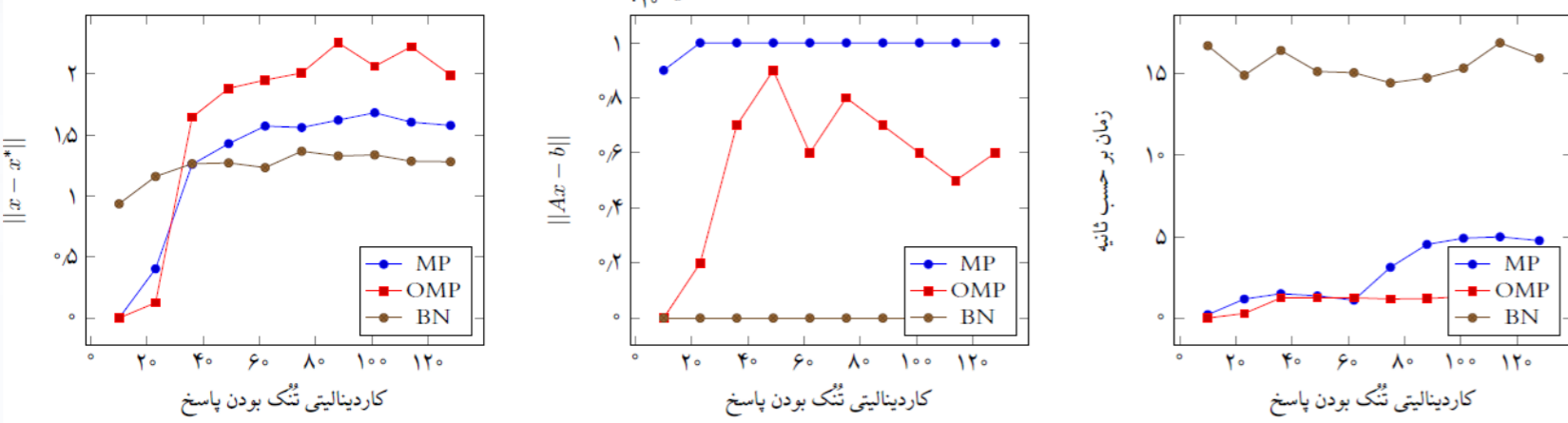
چکیده

در سالین اخیر نمایش تنک کاربردهای متنوعی در پردازش سیگنال پیدا کرده است. در این نمایش هر سیگنال از ترکیب خطی تعداد محدودی از اتم‌های فرهنگ لغت بدست می‌آید. نتایج موفقیت‌آمیز نمایش تنک در زمینه‌های یادگیری ماشین، طبقه‌بندی تصاویر و فراتفکیک‌پذیری تصویر سبب شده است تا انواع روش‌های حل نمایش تنک مورد بررسی قرار گیرد. یک تفاوت اصلی این روش‌ها در نوع نرم بکار گرفته شده در فرمول‌بندی مسئله می‌باشد. هدف از این نوشتار بررسی نرم بلوکی برای حل نمایش تنک است. برای این منظور چگونگی بکارگیری نرم بلوکی در حل بهینه‌سازی تُنگ بیان شده و شیوهی پیشنهادی با دو تا از روش‌های پایه‌ای بهینه‌سازی تُنگ مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج آزمایشات روی داده‌های مصنوعی و در کاربرد فراتفکیک‌پذیری کارایی روش پیشنهادی را نشان داده است.

واژه‌های کلیدی: نمایش تُنگ، فراتفکیک‌پذیری، نرم بلوکی، بهینه‌سازی تُنگ

آزمایشات و نتایج تجربی

نتایج اجرا بر روی سه مجموعه داده‌های تولید شده به صورت مصنوعی و کاربرد واقعی، کارایی بهتر روش پیشنهادی نسبت به دو روش مشهور در حوزه نمایش تُنگ MP و OMP را نشان داد. برتری شیوه پیشنهادی در ابعاد بزرگ A ماتریس مشهودتر است. با استفاده از شیوه پیشنهادی می‌توان جواب تُنگی پیدا نمود که خطای $\|Ax - b\|$ کمتر از هر مقدار کوچک دلخواه باشد. هزینه این دقت، افزایش زمان اجرای روش پیشنهادی نسبت به دو روش قبلی است. مقایسات روی سه مجموعه داده اجرا شده است که در مقاله آمده است، نتایج روی مجموعه سوم به صورت زیر است:



شکل ۱: نتایج مقایسات مجموعه داده ۳

جدول ۱ نتایج اعمال روش پیشنهادی را در مقایسه با سایر روش‌های به کار برده شده در کاربرد فراتفکیک‌پذیری نشان می‌دهد. نتایج بصری خروجی مناسب و نتایج کمی، بهتر بودن این شیوه نسبت به دیگر روش‌های مورد مقایسه را نشان داده است.

جدول ۱: مقایسه روش‌های مختلف در افزایش وضوح تصاویر مختلف. ابعاد تصویر اصلی نصف شده و با روش‌های مختلف بزرگنمایی یا افزایش وضوح داده شده است.

ردیف	تصویر اصلی	NN	BC	MP	BN
۱					
۲					
۳					
۴					
۵					

منابع

J. Wright, Y. Ma, J. Mairal, G. Sapiro, T. S. Huang, and S. Yan, "Sparse representation for computer vision and pattern recognition," Proceedings of the IEEE, vol.98, no.6, pp.1031-1044, 2010.
M. Elad. Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed., 2010. 1, 2
D. L. Donoho, M. Elad, and V. N. Temlyakov, "Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise," Information Theory, IEEE Transactions on, vol.52, no.1, pp.6-18, 2006. 2
K. Klamroth. Single-facility location problems with barriers. Springer Science & Business Media, 2006.
S. G. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," Signal Processing, IEEE Transactions on, vol.41, no.12, pp.3397-3415, 1993.
M. Amintoosi, M. Fathy, and N. Mozayani, "Precise image registration with structural similarity error measurement applied to super-resolution," EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, vol.2009, p.7 pages, 2009. Article ID 305479. 4
J. Yang, J. Wright, T. Huang, and Y. Ma, "Image super-resolution via sparse representation," Image Processing, IEEE Transactions on, vol.19, pp.2861-2873, Nov 2010. 4

مقدمه

در «بهینه‌سازی تُنگ» هدف آن است که از بین تعداد زیادی سیگنال پایه - که در حالت کلی تعدادشان خیلی بیشتر از بعدشان است - کمترین تعداد برای نمایش یک سیگنال انتخاب شود.

در نمایش تُنگ، هر سیگنال پایه، اتم و مجموعه این سیگنال‌های پایه، فرهنگ لغت (Dictionary) نامیده می‌شود. دو مسئله مهم در نمایش تُنگ مورد بحث است. یکی پیدا کردن فرهنگ لغت فوق کامل مناسب برای یک کلاس مشخص از داده‌ها، و مسئله دوم، داشتن الگوریتم کارا برای بدست آوردن تُنگ‌ترین نمایش سیگنال. فرض کنید ماتریس $A \in R^{m \times n}$ ماتریس فرهنگ لغت، و بردار $b \in R^m$ سیگنال (تصویر یا داده آزمون) ورودی داده شده باشد. به بیان ریاضی، هدف پیدا کردن بردار ضرایب $x \in R^n$ به نحوی است که در دستگاه معادلات خطی زیر صدق کند:

$$Ax = b$$

همانطور که بیان شد، در نمایش تُنگ سیگنال‌ها تعداد سیگنال‌های پایه خیلی بیشتر از بعد سیگنال است. در این حالت سیستم خطی بیان شده فرومعین (Underdetermined) است، چرا که تعداد معادلات از مجهولات کمتر است؛ بنابراین سیستم بی‌شمار جواب دارد. یکی از روش‌هایی که برای حل آن وجود دارد افزودن قیدهایی به این معادله است. از بین بی‌شمار جوابی که معادله مورد نظر دارد تنها یکی از جواب‌ها مدنظر ماست، بسته به کاربرد می‌توان جوابی را انتخاب کرد که یک ویژگی منحصر به فرد داشته باشد. یک راه حل معمول برای این هدف، کمینه کردن نرم جواب مورد نظر است. در بسیاری از کاربردها مطلوب ما جوابی است که تا حد ممکن درایه‌ی صفر (یا نزدیک به صفر) داشته باشد. برای این هدف نرم صفر ℓ_0 ، که بیانگر تعداد عناصر غیرصفر سیگنال x است مناسب است که با نماد $\|x\|_0$ نمایش داده می‌شود. تُنگ‌ترین پاسخ برای معادله با کمینه کردن رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(p_0) : \min_x \|x\|_0 \text{ subject to } b = Ax$$

در بسیاری از کاربردهای واقعی، سیستم $Ax = b$ با نویز همراه است. برای این منظور، به جای این مسئله باید نسخه‌ی پایدار نسبت به نویز آن حل شود. بنابراین مسئله زیر تعریف می‌شود:

$$(p_\epsilon) : \min_x \|x\|_0 \text{ subject to } \|b - Ax\|_2 \leq \epsilon$$

روش پیشنهادی

برای حل رابطه (p_ϵ) تا کنون روش‌ها و الگوریتم‌های زیادی، همچون جستجوی تطابقی (MP)، و جستجوی تطابقی متعامد (OMP) پیشنهاد شده است. اساس این روش‌ها مبتنی بر تخمین مرحله به مرحله سیگنال با استفاده از اتم‌های فرهنگ لغت است. در این نوشتار هدف، تقریب نرم صفر مسئله بیان شده با استفاده از نرم بلوکی و حل آن است. در این روش مسئله فوق با نزدیک‌ترین نرم محدب به نرم صفر یعنی نرم یک جایگزین شده و بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(p_1^\epsilon) : \min_x \|x\|_1 \text{ subject to } \|b - Ax\|_2 \leq \epsilon$$

طبق رابطه $\|Ax - b\|_1 < \|Ax - b\|_2 < \|Ax - b\|_\infty$ مسئله (p_1^ϵ) تبدیل به مسئله زیر می‌شود:

$$\min_x \|x\|_1 \text{ subject to } \|b - Ax\|_\infty \leq \epsilon$$

فرض کنید p یک چندبر پیوسته و محدب باشد، شامل مبدا در فضای داخلی، فرض کنید $\text{ext}(P) = \{v^1, \dots, v^\delta\}$ و $x \in R^n$ آنگاه

$$\gamma(x) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i : x = \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i v^i \text{ and } \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, \delta \right\}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که مقدار γ در نقطه $x \in R^n$ یعنی $\|x\|_1$ توسط یک مسئله برنامه‌ریزی خطی برای $\lambda_1, \dots, \lambda_\delta$ قابل حل است. بنابراین می‌توان مسئله مورد نظر را بصورت رابطه زیر حل کرد:

$$\min_{\lambda} \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i'$$

$$s.t$$

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i' b_i', \quad Ax - b = \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 b_i^0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 b_i^0$$

$$\lambda_i, \lambda_i', \lambda_i^0, \lambda_i^0 \geq 0$$