

استفاده از نرم بلوکی در بهینه‌سازی تُنک با کاربرد در فراتفکیک پذیری

راضیه حامدی، دانشجوی کارشناسی ارشد، محمود امین‌طوسی*، استادیار، مهدی زعفرانیه، استادیار
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر. دانشگاه حکیم سبزواری. سبزوار. ایران.
hamedi6417@yahoo.com, {m.amintoosi,m.zaferanieh}@hsu.ac.ir

چکیده: در سالیان اخیر نمایش تنک کاربردهای متنوعی در پردازش سیگنال پیدا کرده است. در این نمایش هر سیگنال از ترکیب خطی تعداد محدودی از اتم‌های فرهنگ لغت بدست می‌آید. نتایج موفقیت‌آمیز نمایش تنک در زمینه‌های یادگیری ماشین، طبقه‌بندی تصاویر و فراتفکیک‌پذیری تصویر سبب شده است تا انواع روش‌های حل نمایش تنک مورد بررسی قرار گیرد. یک تفاوت اصلی این روش‌ها در نوع نُرم بکار گرفته شده در فرمول‌بندی مسئله می‌باشد. هدف از این نوشتار بررسی نُرم بلوکی برای حل نمایش تُنک است. برای این منظور چگونگی بکارگیری نُرم بلوکی در حل بهینه‌سازی تُنک بیان شده و شیوه‌ی پیشنهادی با دو تا از روش‌های پایه‌ای بهینه‌سازی تُنک مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج آزمایشات روی داده‌های مصنوعی و در کاربرد فراتفکیک‌پذیری کارایی روش پیشنهادی را نشان داده است.
کلید واژه‌ها - نمایش تُنک، فراتفکیک‌پذیری، نرم بلوکی، بهینه‌سازی تُنک

۱- مقدمه

مجهولات کمتر است؛ بنابراین سیستم بی‌شمار جواب دارد. یکی از روش‌هایی که برای حل آن وجود دارد افزودن قیدهایی به این معادله است. از بین بی‌شمار جوابی که معادله مورد نظر دارد تنها یکی از جواب‌ها مدنظر ماست، بسته به کاربرد می‌توان جوابی را انتخاب کرد که یک ویژگی منحصر به فرد داشته باشد. یک راه حل معمول برای این هدف، استفاده از شیوه منظم‌سازی^۴ می‌باشد. کمینه کردن نرم جواب مورد نظر، از روش‌های مرسوم است که در حوزه یادگیری ماشین، برای جلوگیری از بیش‌برازش مدل نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر شرطی که روی پاسخ گذاشته می‌شود کمینه کردن $\|x\|_p$ در نظر گرفته شود، در واقع به دنبال کمینه کردن انرژی جواب هستیم. در $\|x\|_p$ ، p می‌تواند بین یک تا بی‌نهایت ($1 \leq p \leq \infty$) تغییر کند [۲]. در این حالت مسئله محدب بوده و در نتیجه جواب بهینه محلی، بهینه سراسری نیز هست. در بسیاری از کاربردها مطلوب ما جوابی است که تا حد ممکن درایه‌ی صفر (یا نزدیک به صفر) داشته باشد. برای این هدف نُرم صفر (ℓ_0)، که بیانگر تعداد عناصر غیرصفر سیگنال x است مناسب است که با نماد $\|x\|_0$ نمایش داده می‌شود. نرم ℓ_0 ، درکی راحت و آسان از تنگی ارائه می‌دهد. تُنک‌ترین پاسخ برای معادله ۱ با کمینه کردن رابطه زیر بدست می‌آید:

$$Ax = b \quad (1)$$

نمایش تنک^۱ کاربردهای روزافزونی در مبحث پردازش تصویر و بینایی ماشین پیدا کرده است [۱، ۲]. موفقیت نمایش تنک در این کاربردها از آنجا ناشی می‌شود که اکثر سیگنال‌های طبیعی مانند تصویر یا صدا با در نظر گرفتن پایه‌های مشخصی دارای نمایش تُنک هستند. در «بهینه‌سازی تُنک» هدف آن است که از بین تعداد زیادی سیگنال پایه - که در حالت کلی تعدادشان خیلی بیشتر از بعدشان است - کمترین تعداد برای نمایش یک سیگنال انتخاب شود. در نمایش تُنک، هر سیگنال پایه، اتم و مجموعه این سیگنال‌های پایه، فرهنگ لغت^۲ نامیده می‌شود.

دو مسئله مهم در نمایش تُنک مورد بحث است. یکی پیدا کردن فرهنگ لغت فوق کامل مناسب برای یک کلاس مشخص از داده‌ها، و مسئله دوم، داشتن الگوریتم کارا برای بدست آوردن تُنک‌ترین نمایش سیگنال. فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس فرهنگ لغت، و بردار $b \in \mathbb{R}^n$ سیگنال (تصویر یا داده آزمون) ورودی داده شده باشد. به بیان ریاضی، هدف پیدا کردن بردار ضرایب $x \in \mathbb{R}^m$ به نحوی است که در دستگاه معادلات خطی^۱ صدق کند:

$$(p_0) : \min_x \|x\|_0, \quad \text{subject to } b = Ax \quad (2)$$

در بسیاری از کاربردهای واقعی، سیستم $Ax = b$ با نویز n همراه است. لذا با تساوی $Ax = b + n$ مواجه هستیم. برای این منظور، به جای مسئله ۲ باید نسخه‌ی پایدار نسبت به نویز آن حل شود.

همانطور که بیان شد، در نمایش تُنک سیگنال‌ها تعداد سیگنال‌های پایه خیلی بیشتر از بعد سیگنال است ($m \gg n$). در این حالت سیستم خطی^۱ فرومعین^۳ است، چرا که تعداد معادلات از

^۱Sparse

^۲Dictionary

^۳Underdetermined

^۴Regularization

بنابراین مسئله زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$(P^\varepsilon) : \min_x \|x\| \text{ subject to } \|b - Ax\|_2 \leq \varepsilon \quad (3)$$

به این ترتیب با حل مسئله فوق، می‌توان یک تخمین از سیگنال بدون نویز b بصورت $\hat{b} = A\hat{x}$ که \hat{x} پاسخ مسئله ۳ است، بدست آورد.

برای حل رابطه ۳ تا کنون روش‌ها و الگوریتم‌های زیادی، همچون جستجوی تطابقی^۵، و جستجوی تطابقی متعامد^۶ پیشنهاد شده است. اساس این روش‌ها مبتنی بر تخمین مرحله به مرحله سیگنال با استفاده از اتم‌های فرهنگ لغت است. این دو شیوه - که جزو الگوریتم‌های حریصانه محسوب می‌شوند - بصورت گام به گام یک یا چند اتم را که بیشترین همبستگی با باقی‌مانده مربوط به نمایش سیگنال دارند انتخاب کرده و با استفاده از آن‌ها این باقی‌مانده را به‌روز می‌کنند. این دو الگوریتم به اختصار در بخش‌های بعد معرفی شده‌اند.

در [۳] اثبات شده است که نزدیک‌ترین نرم محدب به نرم صفر، نرم یک است و جوابی که از آن بدست می‌آید یکتاست. یکی از انواع نرم یک، نرم بلوکی است. تاکنون نرم بلوکی در بهینه‌سازی تئیک بکار برده نشده است. در این نوشتار هدف، تقریب نرم صفر مسئله ۳ با استفاده از نرم بلوکی و حل آن است. در بخش ۲ نرم‌ها و همچنین نرم بلوکی به صورت مختصر بیان شده است. در بخش ۳ دو روش جستجوی تطابقی و جستجوی تطابقی متعامد ذکر شده‌اند. بخش ۴ به بیان روش پیشنهادی اختصاص یافته و سپس نتایج آزمایشات بر روی داده‌های مصنوعی آمده است. به عنوان یک کاربرد، کارایی شیوه پیشنهادی در حوزه فرانتفیک‌پذیری^۷ نشان داده است.

۲- نرم‌ها

در این بخش نرم‌ها و نرم بلوکی به صورت مختصر توضیح داده خواهد شد.

تعریف ۱-۲. فرض کنید S مجموعه‌ای محدب و فشرده در فضای \mathbb{R}^n و شامل مبدا است. تابع گنج^۸ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ نسبت به S بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda S\} \quad (4)$$

در حالات خاص اگر مجموعه S یک چندبر ^۹ $S = P$ باشد،

یا نسبت به مبدا متقارن باشد، رابطه ۴ به ترتیب بیانگر گنج چندوجهی^{۱۰} و نرم x نسبت به S می‌باشد. اما اگر در حالت خاص تر P نیز متقارن باشد، رابطه ۴ نرم بلوکی^{۱۱} x نسبت به S خوانده می‌شود.

در اکثر موارد بجای $\gamma(x)$ از $\|x\|_p$ استفاده می‌شود [۵].

تعریف ۲-۲. نرم l_p ^{۱۲} خانواده خاص و پرکاربردی از نرم‌ها است که بصورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$\|x\|_{l_p} = l_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ for } p \in [1, \infty)$$

$$\|x\|_{l_\infty} = l_\infty(x) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

تعریف ۳-۲. نرم l_∞ ^{۱۳} بصورت $\|x\|_{l_\infty}$ تعداد عناصر غیر صفر بردار x تعریف می‌شود [۵].

تعریف ۴-۲. فرض کنید نقاط فرین^{۱۴} P برابر با $\text{ext}(P) = \{v^1, \dots, v^\delta\}$ باشد. آنگاه v^1, \dots, v^δ بردارهای اساسی نامیده می‌شوند.

لم ۵-۲. فرض کنید P یک چندبر پیوسته و محدب باشد، شامل مبدا در فضای داخلی، فرض کنید $\text{ext}(P) = \{v^1, \dots, v^\delta\}$ و $\gamma(x) = \min\{\sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i : x = \sum_{i=1}^{\delta} \lambda_i v^i \text{ and } \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, \delta\}$ آنگاه [۵]:

لم ۵-۲. نشان می‌دهد که مقدار γ در نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ توسط یک مسئله برنامه‌ریزی خطی برای $\lambda_1, \dots, \lambda_\delta$ قابل حل است.

۳- روش‌های حل نمایش تئیک

در این بخش دو روش پرکاربرد مورد اشاره در بخش مقدمه در حل نمایش تئیک به صورت مختصر بیان می‌شوند.

روش جستجوی تطابقی این روش ابتدا توسط ژانگ و ملت^{۱۵} [۶] مطرح شد. در این روش برای حل مسئله ۳ در هر مرحله تنها ضریب یکی از اتم‌ها مشخص می‌شود. در هر مرحله یک اتم از فرهنگ لغت A که بیشترین شباهت را به داده آزمون b دارد، بعنوان عضو فعال در ترکیب خطی در نظر گرفته شده ضریب

^{۱۰}Polyhedral
^{۱۱}Block Norm
^{۱۲} l_p norm
^{۱۳} l_∞ norm
^{۱۴}Extreme
^{۱۵}Malat, Zhang

^۵Matching Pursuit
^۶Orthogonal Matching Pursuit
^۷Super-Resolution
^۸Gauge
^۹Polytope

فرض کنید $v = \{v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_m\}$ مجموعه بردارهای اساسی دایره یکانی با نرم l_1 باشد. در این صورت مسئله γ را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & \sum_{i=1}^m \lambda_i + \sum_{i=1}^m \lambda'_i \quad (8) \\ \text{s.t.} \quad & \\ x = \quad & \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^m \lambda'_i v'_i \\ Ax - b = \quad & \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^n \lambda'_i v'_i \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda'_i & < \varepsilon \\ \lambda_i, \lambda'_i, \lambda_i, \lambda'_i & \geq 0 \end{aligned}$$

به این ترتیب مسئله بهینه سازی γ ، تبدیل به یک مسئله برنامه ریزی خطی می شود که با استفاده از روش های نقطه داخلی یا سیمپلکس قابل حل است.

۵- آزمایشات و نتایج تجربی

در این بخش عملکرد الگوریتم های MP، OMP و روش پیشنهادی - که آنرا با Block Norm (BN) نشان می دهیم - بر روی داده های تولید شده به صورت تصادفی و همچنین در کاربردی واقعی با هم مقایسه شده اند.

۵-۱- نتایج آزمایشات در داده های مصنوعی

در این بخش برای مسئله ۳ ماتریس A و جواب واقعی x^* به صورت تصادفی تولید شده و بر اساس آنها پاسخ b تولید می شود. با دادن ماتریس های A و b به الگوریتم های مختلف، دقت آنها در برآورد جواب بهینه مورد مقایسه قرار گرفته است. به این منظور ماتریس های فوق در ابعاد مختلف (جدول ۱) تولید شده و در هر اندازه، برای ۱۰ میزان γ کی مختلف مقایسات انجام شده است. معیارهای مورد مقایسه نرم اختلاف پاسخ بدست آمده و مقدار جواب بهینه (x^*) و مقدار $\|b - Ax\|_{l_p}$ می باشد. نمودارهای ۱ و ۳ نتایج مقایسات بر روی دو مجموعه داده اول و سوم از جدول ۱ را نشان می دهد. نتایج نشان داده شده، هر یک میانگین ۵ اجرای مختلف می باشند. نتایج مجموعه داده دوم مشابه مجموعه داده سوم بود که به جهت اختصار از نمایش آن صرف نظر شده است.

مربوط به آن محاسبه می شود. در مرحله بعد، باقی مانده سیگنال آزمون و اتم نخست با بقیه اتم ها مقایسه شده و دوباره مشابه ترین اتم انتخاب می شود. یعنی تفاضل حاصل ضرب این تقریب ۱- تنک در فرهنگ لغت از داده آزمون را به عنوان باقی مانده در نظر گرفته ، مراحل فوق تکرار می شوند. در هر مرحله جمع تقریب های ۱- تنک به دست آمده با تقریب های قبلی به عنوان تقریب جدید در نظر گرفته می شود و این روند تاجایی ادامه می یابد که یا تعداد مراحل مشخصی طی شود و یا خطا از مقدار معینی کمتر شود. الگوریتم جستجوی تطابقی (MP) به دلیل اینکه در هر مرحله نیاز به یک جستجوی ساده دارد، بسیار سریع است، اما به دلیل حریصانه بودن، تضمینی وجود ندارد که به جواب بهینه همگرا شود.

روش جستجوی تطابقی متعامد در روش جستجوی

تطابقی متعامد (OMP) که تعمیم یافته روش قبل است در هر مرحله ضرایب ستون های فعال از ماتریس فرهنگ لغت به صورت مستقل از نتایج مراحل قبل انتخاب می شوند و از نتایج قبلی تنها در یافتن مکان مولفه های غیر صفر استفاده می شود. یعنی در هر مرحله بعد از مشخص شدن اتم جدید، از تمام ضرایب قبلی صرف نظر شده و ترکیبی خطی از تمام اتم های انتخاب شده تا این مرحله، محاسبه می شود که کمترین خطا را برای بازسازی سیگنال آزمون داشته باشد. در واقع در این الگوریتم بر خلاف الگوریتم MP برای بروز کردن نمایش γ ، سیگنال روی زیر فضای تولید شده توسط اتم های انتخاب شده تا آن مرحله، تصویر می شود.

۴- روش پیشنهادی

در این بخش روش پیشنهادی که در این نوشتار برای حل نمایش γ استفاده شده است بیان خواهد شد. در این روش مسئله ۳ با نزدیک ترین نرم محدب به نرم صفر یعنی نرم یک جایگزین شده و بصورت زیر بازنویسی می شود:

$$\min_x \|x\|_{l_1} \quad \text{subject to} \quad \|Ax - b\|_{l_p} < \varepsilon \quad (5)$$

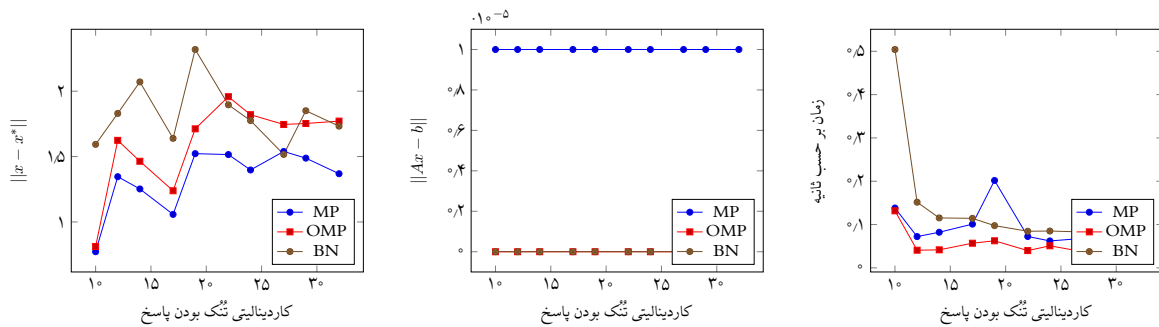
طبق رابطه ۶ اگر جمله $\|Ax - b\|_{l_1}$ کوچکتر از هر ε باشد، آنگاه جمله $\|Ax - b\|_{l_p}$ حتما کوچکتر از ε خواهد بود.

$$\|Ax - b\|_{l_\infty} < \|Ax - b\|_{l_p} < \|Ax - b\|_{l_1} \quad (6)$$

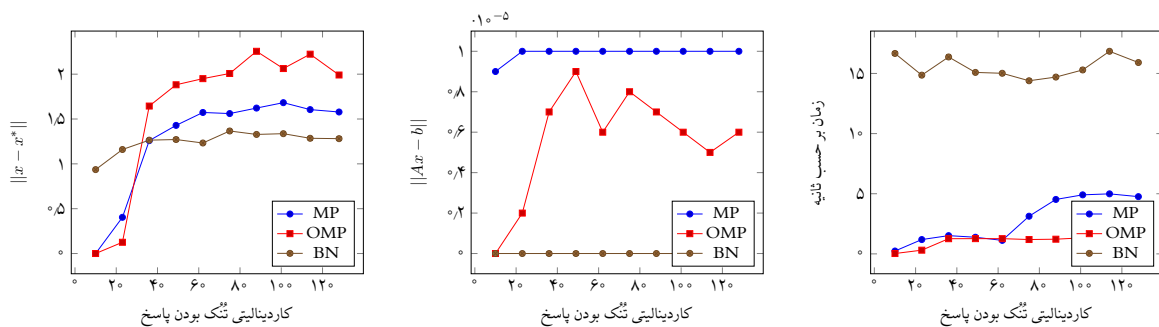
لذا می توان مسئله ۵ را به صورت زیر نوشت:

$$\min_x \|x\|_{l_1} \quad \text{subject to} \quad \|Ax - b\|_{l_1} < \varepsilon \quad (7)$$

که برای حل آن می توان از آنچه در بخش ۲ بیان شد، بصورت زیر بهره گرفت.



شکل ۱: نتایج مقایسات مجموعه داده ۱ در جدول ۱.



شکل ۲: نتایج مقایسات مجموعه داده ۳ در جدول ۱.

۵-۲- نتایج آزمایشات در فراتفکیک پذیری

فراتفکیک پذیری از جمله مسائل حوزه پردازش تصویر است که تحقیقات زیادی را به خود معطوف نموده است [۷، ۸]. در کاربرد موردنظر در اینجا، هدف مسئله، به دست آوردن تصویر با تفکیک پذیری بالا از روی یک تصویر با تفکیک پذیری پایین است. که در ادبیات به فراتفکیک پذیری بر مبنای نمونه معروف است. در این مسئله، دو فرهنگ لغت، یکی برای تصاویر با تفکیک پذیری بالا و دیگری برای تصاویر با تفکیک پذیری پایین آموزش می بینند. با استفاده از ضرایب نمایش تنک هر قطعه از ورودی های با تفکیک پذیری پایین برای تولید خروجی های تفکیک پذیری بالا استفاده می شود. مسئله ی پیدا کردن تنک ترین نمایش از قطعه تصویر ورودی b در فراتفکیک پذیری بصورت زیر بیان می شود:

$$\min_x \|x\|_{l_1} \quad \text{subject to} \quad \|FA_l x - Fb\|_{l_2}^2 \leq \varepsilon \quad (9)$$

که در آن x بیانگر ضرایب تنک، F بیانگر عملگر استخراج ویژگی و A_l معرف فرهنگ لغت با تفکیک پذیری پایین است. پس از بدست آمدن ضرایب تنک x ، قطعه تصویر با تفکیک پذیری بالا به صورت $b_h \approx A_h x$ حاصل می شود که در آن A_h بیانگر فرهنگ لغت با تفکیک پذیری بالاست.

در کاربرد فراتفکیک پذیری این نوشتار، یک فرهنگ لغت از روی مجموعه ای از تصاویر شامل تصاویر طبیعت، حیوانات و چهره انسان











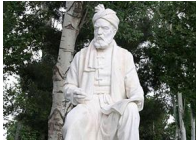


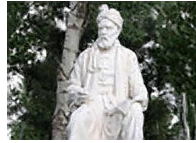
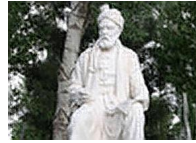










جدول ۱: مشخصات ماتریس $A_{n \times m}$ مورد استفاده در آزمایشات

شماره مجموعه	n	m
1	32	128
2	64	512
3	128	1024

بررسی نمودارهای مربوط به مقایسه $\|Ax - b\|$ در شکل های ۱ و ۲ نشان می دهد که اگر ابعاد ماتریس A کوچک باشد، نتایج روش پیشنهادی نرم بلوکی، بهتر از روش MP و مشابه با OMP است؛ هر دو روش پیشنهادی و OMP خطای نزدیک به صفر دارند. با افزایش اندازه ماتریس A ، روش پیشنهادی همچنان خطای نزدیک به صفر خود را حفظ کرده است، اما دو روش دیگر افزایش خطا داشته اند.

در معیار $\|x - x^*\|$ (نمودارهای میانی شکل های ۱ و ۲) در ابعاد بالاتر، شیوه پیشنهادی کارایی بهتری داشته است. عیب شیوه پیشنهادی زمان اجرای بیشتر آن است. در اندازه های بزرگ، زمان اجرای روش پیشنهادی حدود ۳ برابر روش OMP بوده است. بزرگترین اندازه های ماتریس در نظر گرفته شده در جدول ۱ به نحوی در نظر گرفته شده است که مطابق اندازه تقریبی ماتریس A در کاربرد فراتفکیک پذیری بخش بعد باشد.

جدول ۲: مقایسه روش‌های مختلف در افزایش وضوح تصاویر مختلف. ابعاد تصویر اصلی نصف شده و با روش‌های مختلف بزرگ‌نمایی، یا افزایش وضوح داده شده است. برای مقایسه‌ی بهتر، نسخه الکترونیکی مقاله ملاحظه شود.

ردیف	تصویر اصلی	NN	BC	MP	BN
۱					
۲					
۳					
۴					
۵					



شکل ۳: خروجی نامناسب روش OMP بر روی اولین شکل.

علی‌رغم اینکه در داده‌های مصنوعی بخش پیش، OMP نتایج بهتری تولید کرده بود، اما در عمل نتایج مناسبی نداشت. خروجی آن برای اولین شکل مورد آزمایش را در شکل ۳ مشاهده می‌کنید. لذا از ذکر نتایج این روش در جدول نتایج صرف‌نظر شده است. نتایج کمی مقایسات در نمودارهای ۴ و ۵ و بر اساس معیارهای «میانگین مربعات خطا» و «نسبت سیگنال به نویز» برتری نسبی شیوه پیشنهادی نسبت به روش MP را نشان می‌دهد.

۶- جمع‌بندی

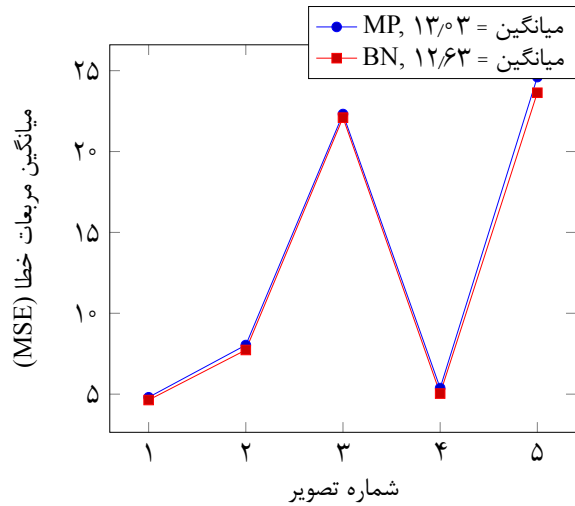
در این مقاله با استفاده از نرم بلوکی، روش بهینه‌سازی تَنک بهبود داده شده است. نتایج اجرا بر روی داده‌های تولید شده به صورت مصنوعی کارایی بهتر آن نسبت به دو روش مشهور در حوزه نمایش تَنک را نشان داد. برتری شیوه پیشنهادی در ابعاد بزرگ ماتریس A مشهودتر است. با استفاده از شیوه پیشنهادی می‌توان جواب تَنکی

فراهم شده است و هدف فقط پیدا کردن تَنک‌ترین نمایش تصویر ورودی با این فرهنگ لغت و افزایش وضوح تصویر ورودی بوده است. به این منظور ۵ تصویر نمایش داده شده در جدول ۲ مورد پردازش قرار گرفتند. نتایج بصری در همین جدول و نتایج کمی در نمودارهای ۴ و ۵ آمده است.

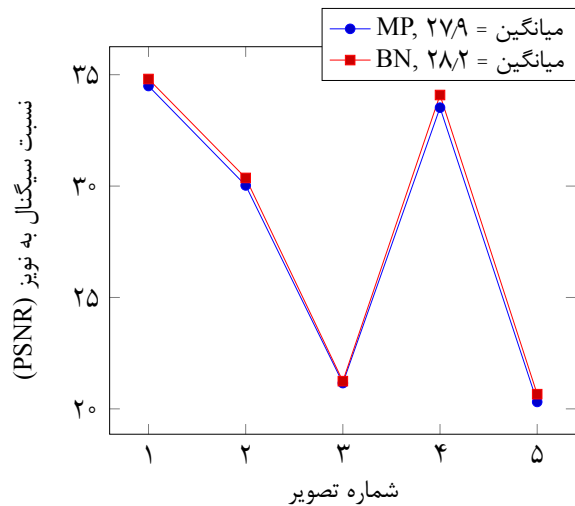
ستون اول جدول مذکور شماره تصویر را نشان می‌دهد که در نمودارهای مقایسات کمی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. ستون دوم، تصویر اصلی با وضوح بالا را نشان می‌دهد. هر تصویر با مقیاس یک دوم کوچک شده و سعی شده است با روش‌های مختلف بهینه‌سازی تَنک و مبتنی بر یک فرهنگ لغت، وضوح آنها افزایش داده شود. ستون سوم (NN) تصویر ورودی است که با روش نزدیک‌ترین همسایگی (Nearest Neighbour) بزرگ‌نمایی شده است. ستون چهارم (BC) نمایش‌دهنده افزایش اندازه تصویر با روش Bicubic می‌باشد. ورودی روش‌های فراتفکیک‌پذیری، تصویر نمایش داده در ستون سوم + فرهنگ لغت است. ستون بعد (MP) نتیجه استفاده از روش جستجوی تطابقی و ستون آخر (BN) نتیجه استفاده از شیوه پیشنهادی در بهینه‌سازی تَنک مسئله را نشان می‌دهد. نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که روش پیشنهادی در افزایش وضوح موفق بوده است و هر تصویر فراتفکیک‌پذیری بهتری نسبت به تصویر ورودی (ستون سوم) داشته است.

مراجع

- [1] J. Wright, Y. Ma, J. Mairal, G. Sapiro, T. S. Huang, and S. Yan, "Sparse representation for computer vision and pattern recognition," *Proceedings of the IEEE*, vol.98, no.6, pp.1031–1044, 2010.
- [2] Y. Chen, N. M. Nasrabadi, and T. D. Tran, "Hyperspectral image classification using dictionary-based sparse representation," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol.49, no.10, pp.3973–3985, 2011.
- [3] M. Elad. *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed. , 2010.
- [4] D. L. Donoho, M. Elad, and V. N. Temlyakov, "Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol.52, no.1, pp.6–18, 2006.
- [5] K. Klamroth. *Single-facility location problems with barriers*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [6] S. G. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol.41, no.12, pp.3397–3415, 1993.
- [7] M. Amintoosi, M. Fathy, and N. Mozayani, "Precise image registration with structural similarity error measurement applied to super-resolution," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol.2009, p.7 pages, 2009. Article ID 305479.
- [8] J. Yang, J. Wright, T. Huang, and Y. Ma, "Image super-resolution via sparse representation," *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol.19, pp.2861–2873, Nov 2010.



شکل ۴: مقایسه میانگین مربعات خطا بین خروجی روش‌های مختلف و تصویر اصلی.



شکل ۵: مقایسه مقدار نسبت سیگنال به نویز.

پیدا نمود که خطای $\|Ax - b\|$ کمتر از هر مقدار کوچک دلخواه باشد. هزینه این دقت، افزایش زمان اجرای روش پیشنهادی نسبت به دو روش قبلی است. به عنوان کار آتی، مؤلفین افزایش سرعت شیوهی پیشنهادی را مدنظر دارند. شیوه پیشنهادی در کاربرد فراتفکیک‌پذیری نیز مورد استفاده قرار گرفت. نتایج بصری خروجی مناسب و نتایج کمی، بهتر بودن این شیوه نسبت به دیگر روش‌های مورد مقایسه را نشان داده است. در این کاربرد فقط در مرحله نمایش تُنک تصویر با فرهنگ لغت موجود، از شیوه پیشنهادی بهره گرفته شده است. استفاده از روش پیشنهادی در تولید فرهنگ لغت، در آینده مورد بررسی قرار خواهد گرفت.