

برش کمینه‌ی گراف با شبیه‌سازی تبریدی

فاطمه سادات حسینی ^{*,**}، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، f.hoseini@sun.hsu.ac.ir
محمود امین‌طوسی، عضو هیات علمی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، m.amintoosi@hsu.ac.ir

چکیده: در مسئله برش مینیمم هدف مینیمم کردن ظرفیت یالهای برش است. از روشهای تقریبی حل این مسائل میتوان به الگوریتم کارگر اشاره کرد. که از تلفیق لبه‌ها به صورت تصادفی استفاده میکند. در این مقاله از شبیه‌سازی تبریدی برای حل این مسئله استفاده شده است و نتایج آن با روش کارگر مقایسه شده است. نتایج آزمایشات برتری روش پیشنهادی را نسبت به روش کارگر از منظر سرعت اجرا، نرخ همگرایی و میانگین خطا نشان داده است.
کلمات کلیدی: گراف، برش کمینه، الگوریتم کارگر، شبیه‌سازی تبریدی،

مقدمه

تاکنون الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی که از جمله الگوریتم‌های فراابتکاری حل مسائل بهینه‌سازی است برای حل مسئله برش کمینه بکار گرفته نشده است. در این مقاله چگونگی بکارگیری این شیوهی حل مسئله برای مواجهه با مسئله‌ی برش کمینه بیان شده و مزایای آن در قالب اجرای مثالهای مختلف بیان شده است. در ادامه مرور بسیار مختصری بر روش شبیه‌سازی تبریدی خواهیم داشت و پس از بیان روش حل این مسئله با الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی به ذکر نتایج آزمایشات خواهیم پرداخت.

در نظریه گراف منظور از برش، تقسیم رئوس گراف به دو زیرمجموعه ناتهی جدا از هم s و $(v-s)$ می‌باشد. یالهای "برش" از یک برش به یالهایی گویند که در مجموعه برش آن باشند. در مسئله برش کمینه‌ی گراف هدف یافتن این دو زیر مجموعه به نحوی است که ظرفیت یالهای برش مینیمم شود. مدل ریاضی برش مینیمم به صورت زیر است:

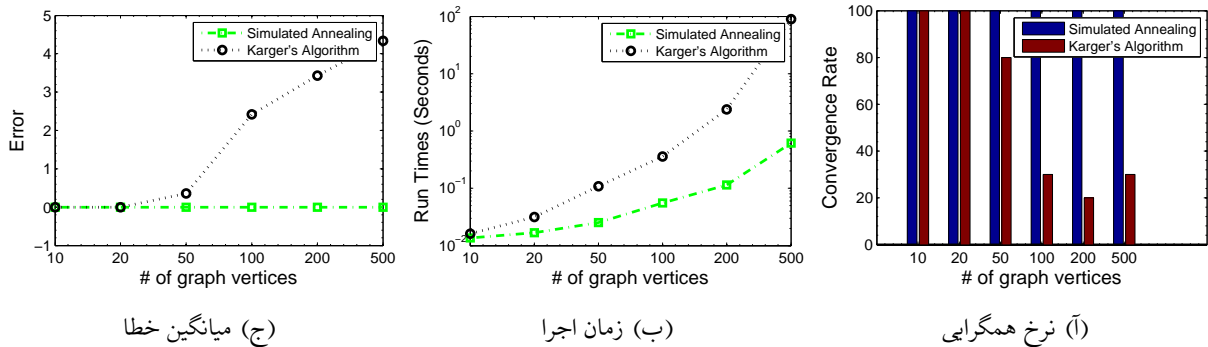
$$\min \sum_{i \in S, j \in (V-S)} C_{ij} \quad (1)$$

به نحوی که $S, (V-S) \neq \emptyset$

یکی از روشهای مشهور برای پیدا کردن برش کمینه روش استور و واگنر است، در این روش در هر مرحله یال با ظرفیت بالاتر تلفیق میشود تا زمانی که فقط دو راس باقی بماند [۱]. در روش کارگر یالها برای تلفیق به صورت تصادفی انتخاب میشوند و با احتمال $(|V|)^{-1}$ برش مینیمم را برمیگرداند [۲]. اگر الگوریتم کارگر را $(|V| - 1)$ بار تکرار کنیم احتمال خطای آن کمتر از 0.14 است. که برای تعداد رئوس بالا بسیار زمانبر است. همانطور که در بخش نتایج آمده است برای گراف با 500 راس هر بار اجرای الگوریتم کارگر تقریباً 100 ثانیه طول میکشد [۳].

الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی

الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی با یک جواب اولیه شروع میشود در همسایگی‌های این جواب یک نقطه انتخاب میشود اگر باعث بهبود تابع هدف می‌شد به عنوان نقطه جدید پذیرفته می‌شود، در غیر این صورت با احتمال $e^{(-\Delta E)/T}$ پذیرفته میشود. ΔE اختلاف تابع هدف و T پارامتر کنترل است پس از رسیدن به حالت تعادل T را کاهش میدهم این روند تارسیدن به شرط خاتمه ادامه میابد [۴].



شکل ۱: مقایسه نتایج روش پیشنهادی (Simulated Annealing) با الگوریتم کارگر

و بهترین جواب، میانگین زمان اجرا و فرکانس همگرایی محاسبه گردید. نتایج آزمایشات در شکل ۱ آمده است. منظور از فرکانس همگرایی، درصد اجراهایی است که اختلاف جواب بدست آمده و جواب اصلی مسئله از یک درصد جواب اصلی کمتر بوده است.

همانگونه که مشاهده می‌شود، در تمام آزمایشات روش شبیه‌سازی تبریدی به جواب رسیده است و نرخ همگرایی آن ۱۰۰ درصد بوده است. زمان اجرای شبیه‌سازی تبریدی با افزایش اندازه مسئله به مقدار بسیار کمی افزایش پیدا کرده است، درحالی‌که زمان اجرای الگوریتم کارگر با افزایش اندازه مسئله به صورت نمایی زیاد شده است به صورتی‌که برای ۵۰۰ رأس، زمان هر اجرای آن تقریباً ۱۰۰ ثانیه شده است که بیش از ۱۰۰ برابر زمان اجرای روش شبیه‌سازی تبریدی است.

مراجع

- [1] M. Stoer and F. Wagner, "A simple min-cut algorithm," *J. ACM*, vol.44, pp.585-591, July 1997.
- [2] D. R. Karger and C. Stein, "A new approach to the minimum cut problem," *J. ACM*, vol.43, pp.601-640, July 1996.
- [3] S. Har-Peled, "Minimum cut in a graph," University Lecture (Randomized Algorithms), 2002.

[۴] م یقینی و م اخوان کاظم زاده. الگوریتمهای بهینه‌سازی فراابتکاری. جهاد دانشگاهی امیرکبیر، ویرایش اول، ۱۳۹۰.

حل برش کمینه با استفاده از شبیه‌سازی تبریدی

بخش اصلی هر روش مبتنی بر شبیه‌سازی تبریدی، نحوه نمایش یک جواب ممکن و تعریف همسایگی یک نقطه در فضای جواب است. در شیوهی پیشنهادی هر نقطه در فضای جواب با یک آرایه با تعداد عناصر برابر با تعداد رئوس گراف نمایش داده می‌شود که اگر عنصر i ام برابر یک باشد، به معنی تعلق به دسته‌ی اول و اگر برابر با صفر باشد به معنی تعلق به گروه دوم خواهد بود. جواب اولیه به صورت تصادفی ایجاد می‌شود. برای ایجاد نقطه همسایه، روشهای مختلفی مورد بررسی قرار گرفت که روشی که بهترین نتایج را داشت به شرح زیر است: برای یک جواب مفروض، یک گروه به صورت تصادفی انتخاب می‌شود (مثلاً گروه اول)، سپس رأسی که مجموع وزن لبه‌های بین آن و سایر اعضای این گروه کمتر از مجموع وزن لبه‌های بین این رأس و رئوس گروه دوم باشد، به گروه دوم منتقل می‌شود. عمل انتقال رأس به شرطی انجام می‌شود که هیچ یک از دو گروه تهی نشوند.

نتایج پیاده‌سازی

روش کارگر و شیوهی پیشنهادی در نرم‌افزار MATLAB پیاده‌سازی شده و نتایج اجرا از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. هر دو روش روی گراف‌هایی با تعداد ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ و ۵۰۰ رأس و با جواب از قبل مشخص اجرا شدند. به لحاظ ماهیت تصادفی هر دو روش، هر روش روی هر مسئله ۲۰ بار اجرا شد